Numerische Mathematik

Übungsaufgabe 1, Abgabe 28.10.1999, 13.00

Aufgabe 1: (4 Punkte)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung x der Gleichung $Ax = b$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Die Berechnungen sollen exakt von Hand durchgeführt werden.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

eine invertierbare Matrix.

Die quadratischen Blockmatrizen A_{11}, A_{22} seien regulär. Bestimmen Sie A^{-1}.

Aufgabe 3: (2 Punkte)
In der Vorlesung ist $perm(A)$, die Permanente einer $n \times n$ Matrix A, definiert worden. Im Jahr 1926 äußerte van der Waerden die Vermutung, daß für stochastische $n \times n$ Matrizen gilt

$$perm(A) \geq \frac{n!}{n^n}.$$

Eine Matrix heißt stochastisch, wenn für ihre Einträge a_{ij} gilt:

$$(i)\ a_{ij} \geq 0 \qquad\qquad (ii)\ \sum_{k=1}^{n} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1,\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Zeigen Sie, daß die Vermutung für $n = 2$ korrekt ist.
Bemerkung: Der Beweis für die Korrektheit der Vermutung im allgemeinen Fall wurde erst vor wenigen Jahren erbracht.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ 17 & 19 & 21 & 23 \\ 25 & 27 & 29 & 31 \end{pmatrix} = (b_{jk})$$

b.w.

Wählen Sie (nicht-triviale) Partitionierungen $A = (A_{ij}), 1 \leq i \leq u,\ 1 \leq j \leq v$

$$B = (B_{jk}), 1 \leq j \leq v, 1 \leq k \leq w$$

und berechnen Sie <u>ein</u> (Matrizen) Element von $C := AB = (C_{ik}),\ 1 \leq i \leq u,\ 1 \leq k \leq w$.

(i) Mit der Formel ($n = 4$),

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

(ii) Mit der Formel

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{v} A_{ij} B_{jk}$$

Aufgabe 5: (3 Punkte)
Bier wird in n Brauereien gebraut und in n Gebiete vermarktet. Die $n \times n$ Matrix A stellt die Lieferungswege dar:

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{falls Gebiet } j \text{ von Brauerei } i \text{ beliefert wird} \\ \phantom{a_{ij}} = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein aufmerksamer Volkswirt merkt, daß jedes Gebiet von genau einer Brauerei Lieferungen erhält.

Zeigen Sie, daß A regulär ist.

Aufgabe 6: (3 Punkte)
Eine ASM Matrix (Alternating Sign Matrix) ist eine $n \times n$ Matrix A wofür:

a) Jedes Element a_{ij} von A ist entweder $0, +1$ oder -1

b) In jeder Zeile und jeder Spalte von A gilt:

   a) Die Summe der Elemente ist gleich 1
   b) Das erste nichtnull Element ist $+1$
   c) Die nichtnull Elemente haben wechselnde Vorzeichen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist z.B. eine ASM Matrix.}$$

Die Vermutung, daß die Anzahl $n \times n$ ASM Matrizen durch

$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}$$

gegeben ist, wurde erst vor kurzem mit großem Aufwand bewiesen. (Notices of the American Mathematical Society, Vol. 46, No. 6, S. 637-646, 1999).

Überprüfen Sie diese Vermutung für $n = 1, 2, 3$.

Numerische Mathematik

Übungsaufgabe 2, Abgabe 4.11.1999, 13.00

Aufgabe 7: (5 Punkte) (Programmieraufgabe)

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die LDR-Zerlegung von A mit dem Programm Matlab (Aufruf: matlab. Benutzen Sie help lu). (Bitte fügen Sie einen Ausdruck der Lösung bei.)

Aufgabe 8: (4 Punkte)

A sei eine $n \times n$-Matrix mit Rang 1. Zeigen Sie:

es existieren Vektoren u, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $A = uv^T$.

Aufgabe 9: (3 Punkte)
Sei

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

a) Benutzen Sie die Sätze und Hilfssätze aus der Vorlesung um folgendes zu bestimmen:

(1) L_1^{-1}, L_2^{-1}

(2) $L_1 \; L_2$

Überprüfen Sie die Ergebnisse.

b) Bestimmen Sie $L_2 L_1$.

Aufgabe 10: (8 Punkte)
Die Matrix $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ sei symmetrisch und positiv semidefinit, d.h.

$$x^T Ax \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, daß es eine linke Matrix L gibt, so daß

$$A = LL^T$$

Numerische Mathematik

Übungsaufgabe 3, Abgabe 11.11.1999, 13.00

Aufgabe 11: (5 Punkte)
Sei $A \in Mat(n,n)$, $C \in Mat(p,n)$, $B \in Mat(n,m)$. A sei regulär. Betrachten Sie folgende Methode zur Berechnung von $CA^{-1}B$. Sei

$$Z := \begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix}$$

Die Matrix Z wird auf die Gestalt

$$Z := \begin{pmatrix} U & F \\ O & Q \end{pmatrix}$$

gebracht, wobei U eine rechte Dreiecksmatrix ist, indem, wie bei Gaußscher Elimination, Vielfachkeiten der 1-er, 2-er, ..., n-ter Zeile von den folgenden Zeilen subtrahiert werden.

a) Zeigen Sie, daß

$$Q = -CA^{-1}B$$

b) Zeigen Sie, daß die Berechnungen so durchgeführt werden können, daß genau

$$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{2}mn^2 + \frac{1}{2}pn^2 + mnp - \frac{1}{2}mn + \frac{1}{2}pn$$

Multiplikationen erforderlich sind.

Aufgabe 12: (5 Punkte)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung x der Gleichung $Ax = b$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Die Berechnungen sollen exakt von Hand durchgeführt werden.

Aufgabe 13: (5 Punkte)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0,33 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 & 0,33 \\ 0,33 & 0,20 & 0,25 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung x der Gleichung $Ax = b$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Die Berechnungen sollen bis auf zwei Stellen ungleich 0 gerundet werden. Bei der Ziffer 5 wird so gerundet, daß die letzte Ziffer gerade ist (rd(16,5)= 16; rd(17,5)= 18).

Aufgabe 14: (5 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 6 & 13 & 13 \\ 10 & 13 & 27 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Führen Sie die Cholesky-Zerlegung von Hand durch und lösen Sie das Gleichungssystem.

Numerische Mathematik

Übungsaufgabe 4, Abgabe 18.11.1999, 13.00

Aufgabe 15: (5 Punkte)
Man zeige:
Die betragsgrößten Elemente einer positiv definiten Matrix treten in der Diagonale auf und sind positiv.

Aufgabe 16: (5 Punkte)
Gegeben sei die reelle, positiv definite $n \times n$ Matrix A'. Sie sei in folgender Weise partitioniert:

$$A' = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix},$$

wobei A eine $m \times m$ Matrix ist.
Man zeige:
$C - B^T A^{-1} B$ ist positiv definit.
Hinweis: Man partitioniere x in entsprechender Weise.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \; x_1 \in \mathbb{R}^m, \; x_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$$

und bestimme bei festem x_2 ein geeignetes x_1, so daß $x^T A' x = x_2^T (C - B^T A^{-1} B) x_2$ gilt.

Aufgabe 17: (Programmieraufgabe) (6 Punkte)
Führen Sie folgendes C-Programm aus und erklären Sie die Ergebnisse

```
#include <stdio.h>

/*	program arith1
*/
main()
{
	long i,n,jp,jf;
	n=40;
	jp=1;
	jf=1;
	for(i=1;i<n;i++){
	  jp=jp+jp;
	  jf=jf*i;
	  printf("%5d%15d%15d\n",i,jp,jf);
	}
      }
```

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Schreiben Sie die folgenden Zahlen in Binärdarstellung und in IEEE-Darstellung mit einfacher Genauigkeit:

a) 27

b) -602

c) 12345

d) $17 \cdot 2^{-140}$

Numerische Mathematik

Übungsaufgabe 5, Abgabe 25.11.1999, 13.00

Aufgabe 19: (5 Punkte)
Verwenden Sie den folgenden Algorithmus (mit einfacher Genauigkeit, d.h. float)

$$
\begin{array}{l}
\text{sum} = 1.0; \quad k = 0; \quad p = 1.0; \\
\text{do}\{ \\
\qquad k = k + 1; \\
\qquad p = p * x / k \\
\qquad \text{sumold} = \text{sum}; \\
\qquad \text{sum} = \text{sum} + p; \\
\qquad \}\text{while}\{\text{sumold} \neq \text{sum}\}.
\end{array}
$$

zur Berechnung der Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Berechnen Sie die Summe für

$$x = +1, -1, +5, -5, +100, -100$$

und drücken Sie jeweils folgende Daten aus
exact = e^x, sum, Fehler = sum - exact, Relative Fehler = |Fehler/exact|.
Erklären Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 20: (10 Punkte) (Abgabe: 2.12.1999)

a) Im entsprechenden Verzeichnis /u/stypa/Public/... finden Sie ein Program "gauss1.c", welches das System

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 23 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

durch Gaußelimination (ohne Pivotsuche) und Rückwärtseinsetzen löst. Durch Rundungsfehlereinfluß wird allerdings ein falsches Ergebnis geliefert. Wie groß sind die Fehler?

b) Benutzen Sie das Programm, um die Gleichungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 13 & 10 & 42 \\ 7 & 7 & 2 & 27 \\ 10 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

zu lösen. Wie groß sind die Fehler?

c) Erweitern Sie das Programm um Spaltenpivotsuche. Welche Ergebnisse werden dann geliefert?

Aufgabe 21: (5 Punkte)
Es seien $n, \epsilon \in \mathbb{R}_+$ und $n \cdot \epsilon \leq 0.1$. Zeigen Sie, daß

$$(1 + \epsilon)^n \leq 1 + 1,06\; n \cdot \epsilon\,.$$

Hinweis: Entwickeln Sie $[(1+\epsilon)^n - 1]$ und schätzen Sie wie bei der Exponentialreihe ab (vgl. Forster I, §8, Satz 2).

(b.w.)

Aufgabe 22: (5 + 5 Punkte)
Sei $a = (a_1, 0) \in \mathbb{R}^2$ und

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^1 \\ (x, y) & \longmapsto & x_1 - x_2 \sin\, y - y \end{array}$$

Zeigen Sie:

a) Es gibt eine Umgebung $U_1 \subset \mathbb{R}^2$ von a, eine Umgebung $V_1 \subset \mathbb{R}$ von a_1 und eine Abbildung

$$\phi : U_1 \longrightarrow V_1$$

mit

$$\begin{array}{rcl} \phi(a) & = & a_1 \\ F(x, \phi(x)) & = & 0 \quad \forall\, x \in U_1. \end{array}$$

b) Bestimmen Sie die Verstärkungsfaktoren der Lösung

$$z = z(d_1, d_2)$$

der Gleichung

$$d_1 - d_2 \sin\, z - z = 0$$

für $(d_1, d_2) = (a_1, 0)$.

Numerische Mathematik

Übungsaufgabe 6, Abgabe 2.12.1999, 13.00

Aufgabe 23: (1 + 4 Punkte)

a) Geben Sie für $x = (-3, 2, 7)^T \quad \|x\|_1, \|x\|_2$ und $\|x\|_\infty$ an.

b) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$ und $\|A\|_F$.

Aufgabe 24: (5 Punkte)
Zeigen Sie: Ist F eine $n \times n$-Matrix mit $||F|| < 1$, so existiert $(I + F)^{-1}$ und es gilt

$$||(I + F)^{-1}|| \leqq \frac{1}{1 - ||F||}.$$

Aufgabe 25: (5 Punkte)
Sei A eine nichtsinguläre $n \times n$-Matrix, $B = A(I + F), ||F|| < 1$ und x und Δx definiert durch $Ax = b$, $B(x + \Delta x) = b$. Dann gilt $\frac{||\Delta x||}{||x||} \leqq \frac{||F||}{1 - ||F||}$, sowie, falls $cond(A) \cdot ||B - A||/||A|| < 1$,

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leqq \frac{cond(A)}{1 - cond(A)\frac{||B-A||}{||A||}} \frac{||B - A||}{||A||}.$$

Aufgabe 26: (5 Punkte)
Sei H_n die $n \times n$ Hilbert Matrix $\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Sei $B_n = (b_{ij}^{(n)}) = H_n^{-1}$.

a) Überprüfen Sie die Formel

$$b_{ij}^{(n)} = \frac{(-1)^{i+j}(n + i - 1)!(n + j - 1)!}{(i + j - 1)[(i - 1)!(j - 1)!]^2(n - i)!(n - j)!}$$

für $n \leq 3$.

b) Bestimmen Sie $b_{11}^{(n)}$ und $b_{nn}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Benutzen Sie die Formel von Stirling, um eine asymptotische Darstellung für $b_{nn}^{(n)}$ zu bekommen.

d) Zeigen Sie, daß die Matrizenelemente von B_n ganzzahlig sind.
Hinweis: Binomialkoeffizienten sind ganzzahlig.

Numerische Mathematik

Übungsaufgabe 7, Abgabe 9.12.1999, 13.00

Aufgabe 27: (3 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die Konditionszahlen κ_1, κ_2 und κ_∞ von A.

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Zeigen Sie:
Für $A, B \in Mat(n,n)$ gilt:

$$||AB||_F \leq ||A||_F ||B||_F$$

Aufgabe 29: (2 Punkte)
Sei $\binom{x_1}{x_2}$ die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \quad 2x_2 &= 4 \\ 0.001x_1 \quad + \quad x_2 &= 0.51 \ , \end{aligned}$$

die mit dem Gaußalgorithmus bei zweistelliger Gleitkommaarithmetik mit Basis zehn und mit Rundung berechnet werden soll.

a) Zeigen Sie:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 \\ 0.001 & 1.0 \end{pmatrix} \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} 1.0 & 2.0 \\ 0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die berechnete Lösung $\hat{x}$.

c) Geben Sie eine Matrix E an mit

$$\begin{aligned} (A+E)\hat{x} &= b \\ |E| &\leq 0.00075(3|A| + 5|\hat{L}| \cdot |\hat{R}|) \end{aligned}$$

Aufgabe 30: (5 Punkte)
Der Wachstumsfaktor bei der Gaußelimination ist definiert als

$$\rho_n(A) = \frac{\max_{i,j,k} |a_{ij}^{(k)}|}{\max_{i,j} |a_{ij}|} .$$

a) Berechnen Sie ρ_n für die Hadamardmatrizen

(1)

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b.w.

(2)

$$H_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) A sei eine $n \times n$ symmetrische positiv definite Matrix. Zeigen Sie, daß $\rho_n(A) \leq 1$.

Numerische Mathematik I

Übungsaufgabe 8, Abgabe 16.12.99, 13.00

Aufgabe 31: (3 Punkte)
Sei $p \in \mathcal{P}_3$ das Polynom, das die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ zwischen den Stützpunkten $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ interpoliert.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten von p mit Hilfe der Formel von Lagrange.

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten von p mit der Newtonschen Interpolationsformel.

(c) Berechnen Sie den Wert $p(0,4)$ mit Hilfe der Rekursionsformel von Neville und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert der durch die Formel von Lagrange geliefert wird.

Aufgabe 32: (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

(a) Das Programm "runge" befindet sich im Verzeichnis /u/stypa/Public/... Lesen Sie das Programm in Maple ein. Der Befehl hierzu lautet "read (runge);".

(b) Berechnen Sie das Beispiel von Runge (s. Skript Seite 156) für das Interpolationspolynom vom Grade 20

  (i) für 21 äquidistante Stützstellen,

  (ii) für die Nullstellen x_k des Tschebyscheff-Polynoms $T_{21}(x)$,
  $x_k = \cos \frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{21}$, $0 \leq k \leq 20$
  als Stützstellen,

indem Sie das Programm "runge" entsprechend verändern.
Bemerkung: Das Programm speichert eine Postskript Datei plot.ps, die gedruckt werden kann.

Aufgabe 33: (4 Punkte)

1. Bestimmen Sie ein Polynom $p \in \mathcal{P}_3$ mit:

$$\begin{aligned} p(0) = 0 \quad &, \quad p'(0) = 1 \\ p(1) = 3 \quad &, \quad p'(1) = 6 \end{aligned}$$

2. Zeigen Sie, daß p eindeutig ist.

Aufgabe 34: (3 Punkte)

Sei $p \in \mathcal{P}_2$ das Polynom, das die Funktion $g(x) = \dfrac{1}{2+x}$ zwischen den Stützpunkten $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$ interpoliert. Bestimmen Sie $p(x)$ mit Hilfe der Formel von Lagrange. Benutzen Sie anschließend Satz 7.5 um im Punkt $\bar{x} = 0,5$ eine obere Schranke für den Fehler $f(\bar{x}) - p(\bar{x})$ zu berechnen und vergleiche diese Abschätzung mit dem tatsächlichen Fehler.

Numerische Mathematik

Übungsaufgabe 9, Abgabe 6.1.2000, 13.00

Aufgabe 35: (5 Punkte)
Seien $\tau_i \in \mathbb{R}/\{0\}$, für $i \leq i \leq n$. Beweisen Sie:

$$[\tau_1, \cdots, \tau_n]\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{\prod\limits_{j=1}^{n} \tau_j}$$

(Hinweis: vollst. Induktion)

Aufgabe 36: (5 Punkte)
Der Numeriker Hacker hat die vierstellige PIN seiner EC-Karte vergessen. Mit Hilfe seines Computers möchte er nun die PIN aus den Daten BLZ, Kontonummer und Ablaufsdatum seiner Karte berechnen. Sein Programm liefert die Auswertung eines Polynoms. Die Werte von $p(6)$ und $p(7)$ ergeben die PIN. Am 31.12.1999 um 23.59 Uhr liefert das Programm noch folgende Tabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
p(x)	1	2	4	8	15	26		

Jetzt erst bemerkt Hacker, daß sein Computer nicht Jahr 2000 fähig ist. Berechnen Sie nun seine vierstellige PIN.

Aufgabe 37: (5 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Seien $x_0, \cdots, x_n$ paarweise unterschiedlich. Sei $p_n(x)$ das Polynom n-ten Grades, das die Daten $(x_i, f(x_i)), 0 \leq i \leq n$ interpoliert. Zeigen Sie,

$$f(x) - p_n(x) = \left[\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right][x_0, \cdots, x_n, x]f, x \in \mathbb{R}^n$$

Aufgabe 38: (2+1+2 Punkte)
Seien $t_1 = t_2 = 0,\ t_3 = 1/2,\ t_4 = 1,\ t_5 = 1,\ t = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ und $\tau_i = i/4,\ i = 1, 2, 3$.

1. Bestimmen Sie $B_{j,2,t}\ (x)$ für $j = 1, 2, 3$ und skizzieren Sie diese Funktionen.
2. Berechnen Sie,
$$B_{j,2,t}\ (\tau_i) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3..$$
3. Eine gegebene Funktion g soll mit B-Splines interpoliert werden.
Zeigen Sie, ohne die Schoenberg-Whitney-Bedingung zu benutzen, daß das Gleichungssystem
$$\sum_{j=1}^{3} a_j B_{j,2,t}\ (\tau_i) = g(\tau_i),\ i = 1, 2, 3$$
eine eindeutige Lösung besitzt.

Ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Start ins Jahr 2000!

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE MATHEMATIK I

Übungsblatt 10 , Abgabe: 13.01.2000 , 13.00 Uhr

Aufgabe 39: (3 Punkte)
Man zeige:

$$\frac{d}{dx}B_{i,k,t}(x) = (k-1)\left\{-\frac{B_{i+1,k-1,t}(x)}{(t_{i+k}-t_{i+1})} + \frac{B_{i,k-1,t}(x)}{t_{i+k-1}-t_i}\right\}$$

Aufgabe 40: (3 Punkte)
Sei $t_i \leq x \leq t_{i+1}$; $r, s \in \mathbb{N}$, $r \leq i+1-k$, $s \geq i$, $k \geq 1$,

$$f(x) = \sum_{j=r}^{j=s} \alpha_j B_{j,k,t}(x) \ .$$

Dann gilt:

$$\min(\alpha_{i+1-k}, \ldots, \alpha_i) \leq f(x) \leq \max(\alpha_{i+1-k}, \ldots, \alpha_i)$$

Aufgabe 41: (6 Punkte)
Folgende Daten sind gegeben:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τ_i	0	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	6
$f(\tau_i)$	0	2.9	3.5	3.8	3.5	3.5	3.5	2.6	0

Sei s_Δ der natürliche kubische Spline, der diese Daten interpoliert:

$$\begin{aligned} s_\Delta(\tau_i) &= f(\tau_i)\ , \quad 1 \leq i \leq n = 9 \\ s''_\Delta(\tau_1) &= 0 \\ s''_\Delta(\tau_n) &= 0\ . \end{aligned}$$

Erstellen Sie die Gleichungen $As = b$ für den Vektor $s \in \mathbb{R}^n$,

$$s = (s''_\Delta(\tau_i))\ , \quad 1 \leq i \leq n\ .$$

Aufgabe 42: (4 Punkte)
Sei H ein Hilbertraum und $x_1, \ldots, x_n \in H$ seien linear unabhängig. Sei $V = \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_n)$ und $v \in V$.

1. Sei $f \in H$. Zeigen Sie: Für die beste Approximation v von f gilt:

$$f - v \ \perp\ V\ .$$

2. Sei $F(w) := \|w - f\|_2^2 \ \ \forall\, w \in H$ und v die beste Approximation von f.

   Zeigen Sie:

$$F(v) - F(w) = -(v - w, v - w) \ \ \forall w \in V \ .$$

Aufgabe 43: (4 Punkte)
Die Funktion $f(x) = x^4$ soll auf dem Intervall $[0,1]$ durch eine Gerade $\ell(x)$ approximiert werden. Bestimmen Sie $\ell(x)$, so daß der Fehler bzgl. der L_2-Norm minimal wird.

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE MATHEMATIK I

Übungsblatt 11 , Abgabe: 20.01.2000 , 13.00 Uhr

Die Aufgaben 42 und 43, Ü 10, müssen erst am 20.1.00 abgegeben werden.

Die Programmieraufgaben 44 und 45, Ü 11, müssen erst am 27.1.00 abgegeben werden.

==

Aufgabe 44: (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

Berechnen Sie den interpolierenden Spline $s_\Delta(x)$ in Aufgabe 41 (korrigiert):

Plotten Sie $s_\Delta(x)$ als auch die Daten $(\tau_i, f(\tau_i))$, $1 \le i \le 9$.

Aufgabe 45: (Programmieraufgabe) (5 Punkte)

Für die Strömung in einem Rohr gilt:

$$\sqrt{\frac{1}{c}} = -0.4 + 1.74 \ell n(R\sqrt{c}) ,$$

wobei R die Reynoldszahl und c die Reibungskonstante ist.
Für $R = 10^5$ berechnen Sie c bis auf 6 Stellen mit Hilfe a) des Newton-Verfahrens, b) der Sekantenmethode, c) der Bisektion, d) der Fixpunktiteration.

Hinweis: Die Lösung ist $c \cong$ `4.48E-03`.

Aufgabe 46: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß die Funktion

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\cos x}{5} - xy^2 + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}\sin y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

auf $\{(x,y) : 0.6 \le x \le 0.7, 0.1 \le y \le 0.2\}$ genau einen Fixpunkt hat.

Prof. Dr. C. W. Cryer 20. Januar 2000 WS 1999/00

PROBEKLAUSUR "Numerische Mathematik I"

Die Vorklausur umfaßt Fragen aus den Übungsblättern 1-11 und der Vorlesung bis einschließlich 3. Feb 2000.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 36 \\ 61 \end{pmatrix}$$

(a) die Lösung x von $Ax = b$ mit Spaltenpivotsuche.

(b) die LR-Zerlegung.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie das zu $f(x) = x^5$ und den Interpolationsstellen $x = -1, 0, 1, 2$ gehörende Interpolationspolynom

(a) durch "naive" Vorgehensweise, d. h. durch Aufstellen eines geeigneten Gleichungssystems

(b) mit der Newton'schen Interpolationsformel.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, daß das Newtonverfahren für das Nullstellenproblem

$$f(x) = x - e^{-x} = 0$$

für alle Startwerte $x_0 \geq 0$ gegen die gesuchte Lösung konvergiert.

Aufgabe 4:

(a) Für welche Matrizen ist die Gauß-Elimination ohne Pivotsuche durchführbar und warum ?

(b) Wie sind B-Splines definiert ?

(c) Betrachten Sie das nichtlineare Gleichungssystem der Form

$$f(x) = 0 \text{ mit } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,.$$

Es sei f in einer Umgebung einer Nullstelle stetig differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$. Konvergiert das Newton-Verfahren für einen beliebigen Startwert aus dieser Umgebung ?

(d) Wie ist die Konditionszahl einer nichtsingulären Matrix $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ definiert ?

(e) Was sind Maschinenzahlen ?

(f) Nennen Sie Iterationsverfahren für nichtlineare Gleichungen.

Aufgabe 5: Zeigen Sie: Die Inverse einer regulären unteren Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine untere Dreiecksmatrix,

Aufgabe 6: Sei $x^{(k)}$ die Iterationsfolge, die durch Anwendung einer Iteration $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}, x^{(k-1)}; f)$ zur Lösung einer Gleichung $f(x) = 0$ entsteht. Es gelte: $x^{(k)} \to x^*$. Sei

$$\epsilon_k := x^{(k)} - x^* \;, \epsilon_k \neq 0 \tag{1}$$

und es gelte

$$\epsilon_{k+1} = C\epsilon_k\epsilon_{k-1}^2 \;, \quad C = \text{konstant} \tag{2}$$

- Zeigen Sie, daß die Ordnung dieser Methode gleich 2 ist.
- Zeigen Sie, daß es keine Funktion G gibt, so daß
  $\phi(u, v; f) = G(u, v, f(u), f(v))$.

Aufgabe 7: Die Rekursionsformel für B-Splines für den Fall $t_i = i \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$ lautet

$$B_{i,k}(x) = \frac{1}{k-1}\{(x-i)B_{i,k-1}(x) + (i+k-x)B_{i+1,k-1}\}.$$

Beweisen Sie damit (oder anders) die Summationsformel

$$\sum_{j=i-k+1}^{i} B_{j,k}(x) = 1 \;\text{ für }\; i < x < i+1,\; k \geq 1.$$

Aufgabe 8: Auf einer Maschine mit Gleitkommaarithmetik (Basis t und Mantissenlänge d) sei $\mathcal{M}$ die Menge der Maschinenzahlen und $eps = \frac{1}{2}d^{-t+1}$. Für $x, y \in \mathcal{M}$ gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $|\delta| \leq eps$ und

$$rd(x * y) = (x * y)(1 + \delta).$$

Das Produkt $P_n = \prod_{i=1}^{n} x_i \neq 0$ von n Zahlen $x_i \in \mathcal{M}$ werde durch folgenden Algorithmus berechnet:

$$\begin{array}{l} P_0 = 1 \\ \text{for } i = 1 \text{ to } n : P_i = P_{i-1} * x_i. \end{array}$$

Es bezeichne $\overline{P}_n$ das tatsächlich berechnete Produkt.
Zeigen Sie, daß

$$\frac{\overline{P}_n}{P_n} \leq e^{n \cdot eps}.$$